**Лекция №4.**

**Применение преобразования Лапласа для решения интегрального уравнения Вольтерра 2 –го рода.**

Различают прямое и обратное преобразование Лапласа. Прямое преобразование Лапласа определяется уравнением

 , (1)

где  - функция действительного переменного , определенная при (при ;  и удовлетворяющая условиям ограниченного роста, т.е.

,

где  и  положительные действительные числа.

Обратное преобразование Лапласа

.

- изображение по Лапласу,  - оригинал.

Следовательно, оригинал и изображение представляют собой функции действительного переменного  и комплексного переменного , связанных преобразованием Лапласа.

Для сокращенной записи используют следующую символику

, ,  - оператор Лапласа.

Рассмотрим основные свойства преобразования Лапласа:

1. Линейность:

;  ,

- постоянный вещественный коэффициент.

1. Дифференцирование оригинала:

;  .

1. Интегрирование оригинала:

;  .

1. Теорема подобия.

; , - постоянный вещественный коэффициент.

1. Теорема запаздывания.

;  .

1. Дифференцирование и интегрирование оригинала по параметру:

;  , .

1. Произведение изображений

, ,

.

Интегралы, входящие в эту формулу носят название свертки функций  и .

1. Дифференцирование изображения

;  .

1. Интегрирование изображений

;  .

Таблица преобразований Лапласа.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Оригинал | Изображение | Оригинал | Изображение |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра типа свёртки

Ядро которого зависит только от разности .

Пусть функции - достаточно гладкие функции, растущие при не быстрее показательной функции, так что

, 

для некоторых значений .

Как было доказано, уравнение (1) имеет непрерывное решение при любом . В этом случае решение уравнения  удовлетворяет оценке

.

Следовательно, может быть найдено преобразование Лапласа для функций , ,  (оно будет определено в полуплоскости .

Пусть , , .

Применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и используя теорему умножения, получим

,

откуда получаем

, .

Находим оригинал от , получили решение уравнения (1).

Докажем свойство произведения изображений , .





.

Пример 1.

Найти преобразования Лапласа для следующих функций:

1. 

, .

1. 

.

1. 

.

1. .



.

, .

Решить интегральные уравнения с помощью преобразования Лапласа.

Пример 2.

.

, , .

.

,   .

Пример 3.

.

, , , .

.

  .

Пример 4.

 



, , .

.

  .